

# 第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

## 初二 第2试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 实数  $a, b, c, d$  满足:① $a + b = c + d$ ;② $a + d < b + c$ ;③ $c < d$ . 则  $a, b, c, d$  的大小关系是

- ( )  
 (A)  $a < c < d < b$ . (B)  $b < c < d < a$ . (C)  $c < d < a < b$ . (D)  $c < d < b < a$ .

2. 下列等式中不恒成立的是( )

- (A)  $\frac{a+b}{a} + \frac{a+b}{b} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{a+b}{b}$ . (B)  $\frac{a}{a+1} - \frac{b}{b+1} = \frac{a}{a+1} \cdot \frac{b}{b+1}$ .  
 (C)  $a + \frac{a}{a^2-1} = a^2 \cdot \frac{a}{a^2-1}$ . (D)  $\frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3} = \frac{a+b}{a+(a-b)}$ .

3. 一组数据由五个正整数组成,中位数是4,且唯一的众数是7,则这五个正整数的平均数等于

- ( )  
 (A) 4.2 或 4.4. (B) 4.4 或 4.6. (C) 4.2 或 4.6. (D) 4.2 或 4.4 或 4.6.

4. 化简:  $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} =$  ( )

- (A) 1. (B)  $\sqrt{2}$ . (C)  $\sqrt{3}$ . (D) 2.

5. Put 8 identical balls into 3 different boxes, each box has at least 2 balls. How many different ways to put the balls? ( )

- (A) 6. (B) 12. (C) 18. (D) 36.

(英汉词典:identical 完全相同的)

6. 如图1,在平面直角坐标系内,A、B、C三点的坐标分别是(0,0),(4,0),(3,-2),以A、B、C三点为顶点画平行四边形,则第四个顶点不可能在( )

- (A) 第一象限. (B) 第二象限. (C) 第三象限. (D) 第四象限.

7. 如图2,设点A、B是反比例函数  $y = \frac{k}{x}$  图象上的两点,AC、BD都垂直于y轴,垂足分别是C、D.连接OA、OB,若OA交BD于点E,且  $\triangle OBE$  的面积是2011,则梯形AEDC的面积是( )

- (A) 2009. (B) 2010. (C) 2011. (D) 2012.

8. 如图3,在矩形ABCD中,AB=6,BC=8,P是AD上的动点,PE  $\perp$  AC于E,PF  $\perp$  BD于F,则PE+PF的值是( )

- (A) 4.6. (B) 4.8. (C) 5. (D) 7.

9. 设a、b是实数,且  $\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} = \frac{1}{b-a}$ ,则  $\frac{1+b}{1+a} + \frac{1+a}{1+b}$  的值是( )

- (A) 3. (B) -3.  
 (C)  $3(b-a)$ . (D) 无法确定的.

10. 循环节长度是4的纯循环小数化成最简分数后,分母是三位数,这样的循环小数有( )

- (A) 798个. (B) 898个. (C) 900个. (D) 998个.

二、填空题(每小题4分,共40分.)

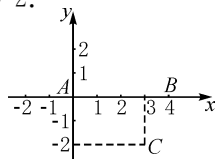


图1

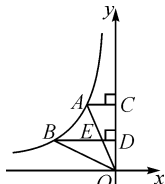


图2

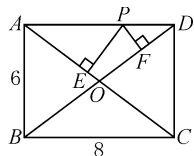


图3

11. 若  $a \neq 0$ , 计算:  $a^{2012} \div a^{2011} \div a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

12. 若以  $x$  为未知数的方程  $\frac{2x+a}{x+2} = -1$  的根是负数, 则实数  $a$  的取值范围是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

13. 若  $n (n \neq 0)$  是以  $x$  为未知数的方程  $x^2 - mx - 5n = 0$  的根, 则  $m - n$  的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

14. 正整数  $a, b$  满足等式  $\frac{13}{15} = \frac{a}{3} + \frac{b}{5}$ , 那么  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $b = \underline{\hspace{2cm}}$ .

15. 已知  $x + \frac{1}{x} = 6 (0 < x < 1)$ , 则  $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$  的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

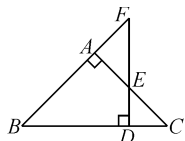


图 4

16. 已知点  $A(4, m), B(-1, n)$  在反比例函数  $y = \frac{8}{x}$  的图象上, 直线  $AB$  与  $x$  轴交于点  $C$ . 如果点  $D$  在  $y$  轴上, 且  $DA = DC$ , 则点  $D$  的坐标是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

17. 如图 4, 等腰直角  $\triangle ABC$  中,  $\angle A = 90^\circ$ , 底边  $BC$  的长为 10, 点  $D$  在  $BC$  上, 从  $D$  作  $BC$  的垂线交  $AC$  于点  $E$ , 交  $BA$  的延长线于点  $F$ , 则  $DE + DF$  的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

18. 如图 5, 在边长为 6 的菱形  $ABCD$  中,  $DE \perp AB$  于点  $E$ , 并且点  $E$  是  $AB$  的中点, 点  $F$  在线段  $AC$  上运动, 则  $EF + FB$  的最小值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ , 最大值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

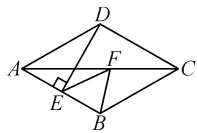


图 5

19. 若实数  $a, b, c$  满足  $\frac{ab}{a+b} = 3, \frac{bc}{b+c} = 4, \frac{ca}{c+a} = 5$ , 则  $\frac{abc}{ab+bc+ca}$  的值是  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

20. Suppose  $M = abc321$  is a 6-digit number.  $a, b$ , and  $c$  are three different 1-digit numbers, and not less than 4. If  $M$  is a multiple of 7, then the minimum value of  $M$  is  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(英汉词典: multiple 倍数)

### 三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

如图 6, 直线  $y = x + b (b \neq 0)$  交坐标轴于  $A, B$  两点, 交双曲线  $y = \frac{2}{x}$  于点  $D$ ,

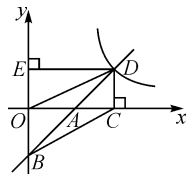


图 6

从点  $D$  分别作两坐标轴的垂线  $DC, DE$ , 垂足分别为  $C, E$ , 连接  $BC, OD$ .

(1) 求证:  $AD$  平分  $\angle CDE$ .

(2) 对任意的实数  $b (b \neq 0)$ , 求证:  $AD \cdot BD$  为定值.

(3) 是否存在直线  $AB$ , 使得四边形  $OBCD$  为平行四边形? 若存在, 求出直线的解析式; 若不存在, 请说明理由.

22. (本题满分 15 分)

如图 7, 在一条平直公路的前方有一陡峭的山壁, 一辆汽车正以恒定的速度沿着公路向山壁驶去.



图 7

(1) 若汽车的行驶速度是 30m/s, 在距离山壁 925m 处时汽车鸣笛一声, 则经过多长时间后司机听到回声?

(2) 某一时刻, 汽车第一次鸣笛, 经过 4.5s 再次鸣笛. 若司机听到两次鸣笛的回声的时间间隔是 4s, 求汽车的行驶速度.

(已知声音在空气中的传播速度是 340m/s.)

23. (本题满分 15 分)

生产某产品要经过三道工序, 同一个人在完成这三道工序时所用的时间相同. 甲、乙二人同时开始生产, 一段时间后, 甲恰好完成第  $k$  个产品的生产, 此时, 乙正好在进行某个产品的第一道工序的操作. 若甲、乙的生产效率比是 6 : 5, 问此时乙至少生产了多少产品?

## 初二 第2试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	B	D	B	A	B	C	B	A	C
题号	11	12		13		14		15		
答案	1	$a > -2$ 且 $a \neq 4$		-5		2; 1		-2		
题号	16	17		18		19		20		
答案	$\left(0, \frac{11}{4}\right)$	10		$3\sqrt{3}; 6+3\sqrt{7}$		$\frac{120}{47}$		468321		

21. (1) 略。  
 (2) 略。  
 (3) 存在;  $AB: y = x - 1$ 。
22. (1) 5 秒后司机听到回声。  
 (2) 汽车的行驶速度是 20 米/秒。
23. 乙至少生产了 4 个产品。