第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛

初二　第 2 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.)

1. 在无理数$\sqrt{5}$,$\sqrt{6}$,$\sqrt{7}$,$\sqrt{8}$ 中,介于$\dfrac{\sqrt{8}+1}{2}$与$\dfrac{\sqrt{26}+1}{2}$之间的数有(　　)

(A) 1 个.　　(B) 2 个.　　(C) 3 个.　　(D) 4 个.

2. 已知 $x+\dfrac{1}{x}=6(0<x<1)$,则$\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ 的值是(　　)

(A) $-\sqrt{5}$.　　(B) -2.　　(C) $\sqrt{5}$.　　(D) 2.

3. 有 3 个正整数 a,b,c,并且 $a>b>c$.从中任取 2 个,有 3 种不同的取法.将每一种取法取出的 2 个数分别作和及作差,得到如下 6 个数:42,45,64,87,109,151.则 $a^2+b^2+c^2$ 的值是(　　)

(A) 12532.　　(B) 12533.　　(C) 12534.　　(D) 12535.

4. 已知有理数 a,b,x,y 满足 $ax+by=3$,$ay-bx=5$,那么$(a^2+b^2)(x^2+y^2)$的值是(　　)

(A) 225.　　(B) 75.　　(C) 54.　　(D) 34.

5. Among all the following points, which one is on the graph of function $y=x^2-2x-3$? (　　)

(A) $(1,-3)$.　　(B) $(0,3)$.　　(C) $(-1,0)$.　　(D) $(-2,1)$.

(英汉词典:graph 图象;function 函数)

6. 下列命题中,正确的是(　　)

(A) 如果三角形三个内角的度数比是 3 : 4 : 5,那么这个三角形是直角三角形.

(B) 如果直角三角形的两条直角边的长分别是 a 和 b,那么斜边的长是 a^2+b^2.

(C) 如果三角形三条边长的比是 1 : 2 : 3,那么这个三角形是直角三角形.

(D) 如果直角三角形的两条直角边的长分别是 a 和 b,斜边长是 c,那么斜边上的高的长是$\dfrac{ab}{c}$.

7. 甲、乙、丙、丁 4 名跑步运动员的速度依次是 v_1,v_2,v_3,v_4,且 $v_1>v_2>v_3>v_4>0$,他们沿直跑道进行追逐赛的规则如下:

① 4 人在同一起跑线上,同时同向出发;

② 经过一段时间后,甲、乙、丙同时反向,谁先遇到丁,谁就是冠军.

则(　　)

(A) 冠军是甲.　　(B) 冠军是乙.　　(C) 冠军是丙.　　(D) 甲、乙、丙同时遇到丁.

8. 已知直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 与 x 轴的交点在 x 轴的正半轴上,则(　　)

(A) $k>0,b>0$.　　(B) $k<0,b<0$.　　(C) $kb>0$.　　(D) $kb<0$.

9. 如图 1,函数 $y_1=k_1x+b$ 和 $y_2=k_2x$ 的图象交于点$(-1,-2)$,则关于 x 的不等式 $k_1x+b>k_2x$ 的解集是(　　)

(A) $x>-1$.　　(B) $x<-1$.　　(C) $x<-2$.　　(D) $x>-2$.

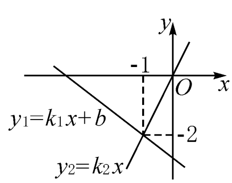

图 1

10. 设 $q=mn$,$p=\sqrt{q+n}+\sqrt{q-m}$,其中 m,n 是两个连续的自然数$(m<n)$.则 p(　　)

(A) 总是奇数.　　(B) 总是偶数.

(C) 有时是奇数,有时是偶数.　　(D) 有时是有理数,有时是无理数.

二、填空题（每小题 4 分，共 40 分.）

11. 已知 $a=\sqrt{5}+2, b=\sqrt{5}-2$，则 a^2+b^2+7 的平方根的值是__________.

12. 60 名学生参加英语测试，若优秀的学生占 45%，则在扇形统计图中，表示优秀的扇形的圆心角是__________度；若表示良好的扇形的圆心角是 120°，则良好的学生有__________人.

13. 若 x_1, x_2 都满足 $|2x-1|+|2x+3|=4$，且 $x_1<x_2$，则 x_1-x_2 的取值范围是__________.

14. 若直线 $y=2x+b$ 与坐标轴围成的三角形的面积是 4，则 $b=$__________.

15. 已知 a, b 都是有理数，若不等式 $(2a-b)x+3a-b<0$ 的解集是 $x>\frac{1}{4}$，则不等式 $(a+3b)x+a-2b>0$ 的解集是__________.

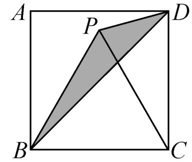

图 2

16. 如图 2，点 P 在正方形 $ABCD$ 内，$\triangle PBC$ 是正三角形，若 $\triangle BPD$ 的面积是 $\sqrt{3}-1$，则正方形 $ABCD$ 的边长是__________.

17. 直线 $y=x-1$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，点 C 在坐标轴上，$\triangle ABC$ 是等腰三角形，则满足条件的点 C 有__________个.

18. 已知 $x^2-x-1=0$，则 $\frac{x^3+x+1}{x^4}=$__________.

19. 如图 3，矩形纸片 $ABCO$ 平放在 xOy 坐标系中，将纸片沿对角线 CA 向左翻折，点 B 落在点 D 处，CD 交 x 轴于点 E. 若 $CE=5$，直线 AC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+m$，则点 D 的坐标是__________.

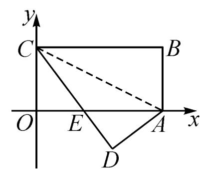

图 3

20. 已知正整数 x, y 满足 $\frac{5}{9}<\frac{y}{x}<\frac{3}{5}$，则 $x-y$ 的最小值是__________.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21.（本题满分 10 分）

已知 $m^2=n+2, n^2=m+2(m\neq n)$，求 $m^3-2mn+n^3$ 的值.

22.（本题满分 15 分）

As in Figure 4, both $\angle D=\angle E=90°$ in trapezoid $ADEB$. $\triangle ABC$ is an equilateral triangle with C on DE. If $AD=7$ and $BE=11$, find the area of $\triangle ABC$. （英汉词典：trapezoid 梯形；equilateral triangle 等边三角形；area 面积）

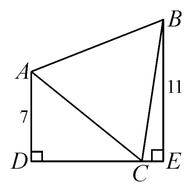

Fig. 4

23.（本题满分 15 分）

有 $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，它们满足下列条件：

① 如果对于其中的任意一个整数 a_m，都有 $-a_m$ 不在这 n 个整数中，则称这 n 个整数满足性质 P；

② 若在这 n 个整数中选两个不同的整数 a_i, a_j，使它们成为一个有序整数对 (a_i, a_j)，并恰好 a_i+a_j 也在这 n 个整数中，则这样的整数对为“和整数对”；

③ 若在这 n 个整数中选两个不同的整数 a_i, a_j，使它们成为一个有序整数对 (a_i, a_j)，并恰好 a_i-a_j 也在这 n 个整数中，则这样的整数对为“差整数对”.

回答下列问题：

(1) 3 个整数 $-1, 2, 3$ 是否满足性质 P？如果满足性质 P，请写出其中所有的“和整数对”和“差整数对”；

(2) 若 $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$ 满足性质 P，其中“差整数对”有 k 个，试证明 $k\leqslant\frac{n(n-1)}{2}$；

(3) 若 $n(n\geqslant 2)$ 个整数 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$ 满足性质 P，其中“和整数对”有 l 个，“差整数对”有 k 个，试证明 $l=k$.

初二　第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	C	D	C	D	C	D	B	A

题号	11	12	13	14	15
答案	± 5	162°；20	$-2 \le x_1 - x_2 < 0$	± 4	$x > \frac{23}{47}$

题号	16	17	18	19	20
答案	2	7	1	$\frac{24}{5}, -\frac{12}{5}$	3

21. -2.

22. $31\sqrt{3}$.

23. （1）和整数对：（-1，3）和（3，-1）.

差整数对：（2，3）和（2，-1）.

（2）略.