第二十六届“希望杯”全国数学邀请赛

初三　第 2 试试题

一、选择题(每小题 4 分,共 40 分.以下每个题目的选择支中,仅有一个是正确的.)

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象如图 1,则下列不等式中,一定成立的是(　　)

(A) $ab>0$.　　(B) $ac<0$.　　(C) $bc>0$.　　(D) $abc>0$.

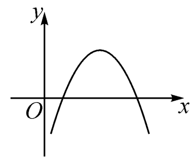

图 1

2. 在 Rt△ABC 中,$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 所对边的长分别是 a,b,c,若 $\angle B=90^\circ$,则关于 x 的方程 $b(x^2+1)+2ax+c(1-x^2)=0$(　　)

(A) 有两个相等的实数根.　　(B) 有两个不相等的实数根.

(C) 没有实数根.　　(D) 根的情况不确定.

3. 已知正实数 a,b,c 满足 $\frac{c}{a+b}<\frac{a}{b+c}<\frac{b}{c+a}$,则下列不等式中一定成立的是(　　)

(A) $a<b<c$.　　(B) $b<c<a$.　　(C) $c<a<b$.　　(D) $a<c<b$.

4. Given an equation $2x^2+3x+5m=0$. If one root of the equation is larger than 1, then the value range of m is (　　)

(A) $m<-1$.　　(B) $|m|<1$.

(C) $0<m<1$.　　(D) $m\leqslant -1$.

(英汉小词典:root 方程的根)

5. 若 x,y 都是正实数,并且 $x+y=2015$,则 $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$ 的最小值是(　　)

(A) 2015.　　(B) $\frac{2015}{2}$.　　(C) 2.　　(D) 1.

6. 用 k 个相同的长方形按图 2 的方式拼成一个正方形,则 k 的值为(　　)

(A) 10.　　(B) 12.　　(C) 18.　　(D) 24.

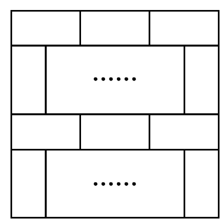

图 2

7. 化简 $\frac{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,可得(　　)

(A) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$.　　(B) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.　　(C) $2-\sqrt{2}$.　　(D) $\sqrt{2}-1$.

8. 如图 3,正方形 $ABCD$ 的边长为 $10+5\sqrt{2}$,点 E 在边 CB 上,$EF\perp DE$,与 AC 的延长线交于点 F,若 $CE=CF$,则 CE 的值为(　　)

(A) 5.　　(B) $5\sqrt{2}$.　　(C) 10.　　(D) $10\sqrt{2}$.

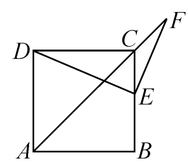

图 3

9. 如图 4,已知 $\angle B=45^\circ$,$\angle C=30^\circ$,甲、乙两人分别从 B,C 出发,向 A 处行走,甲的速度为 18 米 / 分,若两人同时到达 A 处,则乙的速度是(　　)

(A) $9\sqrt{6}$ 米 / 分.　　(B) $18\sqrt{2}$ 米 / 分.

(C) $18\sqrt{3}$ 米 / 分.　　(D) $9(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 米 / 分.

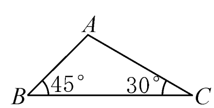

图 4

10. 如图 5,AB、AC 分别和圆 O 切于点 B、C,直线 AO 交 BC 于点 M,若 $OM=\frac{1}{3}BC$,$\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{BO^2}=\frac{1}{4}$,则 $\triangle BOC$ 的面积是(　　)

(A) 2.　　(B) $\frac{5}{2}$.　　(C) $\frac{8}{3}$.　　(D) 3.

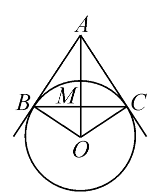

图 5

二、填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 化简:$\sqrt{2-4\sqrt{3-2\sqrt{2}}}=$__________.

12. 若 $x<0, y<0$,且 $x-6y=-\sqrt{xy}$,则 $\dfrac{x}{y}=$__________.

13. Suppose non-zero real number a and b satisfy $ab=a-b$, then $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}-ab=$__________.

(英汉小词典:satisfy 满足)

14. 若关于 x 的不等式组 $\begin{cases}x^2-x-2<0,\\2015x-m\geqslant 0\end{cases}$ 仅有一个整数解,则满足条件的整数 m 有__________个.

15. 已知 $a\neq 0, c>0, b$、c 是实数,若二次函数 $f(x)=a^2x^2+bx+c$ 满足 $|f(0)|=|f(1)|=|f(2)|=1$,则 $\dfrac{b-2c}{a}=$__________.

16. 如图 6,已知点 B、C 在圆上,点 A 在 $\odot O$ 内,$\angle A=\angle B=60°$,$AB=8\text{cm}$,$BC=12\text{cm}$,则 $\odot O$ 的半径长为__________.

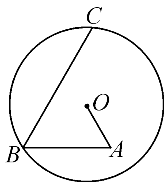

图 6

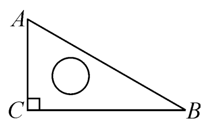

图 7

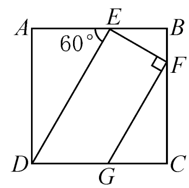

图 8

17. 满足不等式 $2<\sqrt[3]{28-\sqrt{x}}<3$ 的最大质数 $x=$__________.

18. 已知 $x^2=x+1, y^2=y+1$,且 $x\neq y$,则 $x^3+y^3=$__________.

19. 如图 7,在 $\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle B=30°$,$AB=10$,半径为 1 的圆在三角形内随意移动,则三角形内始终不能被圆覆盖部分的面积是__________.(圆周率 π 取 3)

20. 如图 8,已知正方形 $ABCD$,$AB=\sqrt{12}$,$\angle AED=60°$,$ED\,/\!/\,FG$,$EF\perp FG$,则 $\dfrac{AE+BF+CG}{AD}=$__________.

三、解答题 每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个整数,且 $1=a_1<a_2<\cdots<a_n=2016$,若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中任意 $n-1$ 个数的平均数仍是整数,求 n 的最大值.

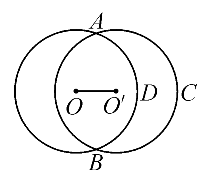

图 9

22. (本题满分 15 分)

如图 9,圆心在 O、O',半径都是 12 的两个等圆交于 A、B 两点,若弧 ACB 比弧 ADB 长 4π,求 OO' 的长.

23. (本题满分 15 分)

如图 10,在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,$\angle C=90°$,$\angle B=30°$,$AC=3\text{m}$,点 P 和点 Q 同时从点 A 出发,P 沿折线 A-C-B-A 以 1m/s 的速度运动,Q 沿折线 A-B-C-A 以 2m/s 的速度运动(当其中一点回到 A 点时,另一点也随之停止运动).求:

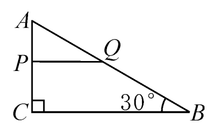

图 10

(1) 当 PC 和 PQ 第一次相等时点 P 运动的时间;

(2) 当 $\triangle APQ$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半时点 P 运动的时间.

初三　第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	A	C	A	C	C	D	B	B	C

题号	11	12	13	14	15
答案	$2-\sqrt{2}$	9	2	2015	$\pm3\sqrt{2}$ 或 ±5

题号	16	17	18	19	20
答案	$4\sqrt{3}$	397	4	$2\sqrt{3}$	$\dfrac{10\sqrt{3}-6}{9}$

21. n 的最大值是 32.

22. $OO'=6(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

23.（1）PC 和 PQ 第一次相等时，点 P 运动的时间是 $\dfrac{3\sqrt{3}-3}{2}$ 秒.

（2）当△APQ 的面积等于△ABC 面积的一半时点 P 运动的时间是

$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ 秒，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}+3$ 秒或 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+3$ 秒.