

# 第二十三届“希望杯”全国数学邀请赛

## 高二 第2试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 已知集合  $P = \{x \mid 0 \leq x \leq 5, x \in \mathbf{Z}\}$ ,  $Q = \{y \mid y = |x^2 - 1|, x \in P\}$ , 则  $P \cap Q$  中元素的个数是( )

- (A) 3. (B) 6. (C) 8. (D) 9.

2. 方程  $\log_{13} |x| = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}x\right)$  的实根的个数是( )

- (A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

3. 命题  $p$ : 不经过第一象限的图象所对应的函数一定不是幂函数.

命题  $q$ : 函数  $y = x + \frac{2}{x}$  的单调递增区间是  $[-\sqrt{2}, 0) \cup [\sqrt{2}, +\infty)$ ,

则下列命题中, 真命题是( )

- (A)  $p \wedge q$ . (B)  $(\neg p) \vee q$ . (C)  $(\neg p) \wedge (\neg q)$ . (D)  $p \wedge (\neg q)$ .

4. 设  $a, c$  是正实数, 则对于每个实数  $t$ , 抛物线  $y = ax^2 + tx + c$  的顶点在  $x-O-y$  平面内组成的图形是( )

- (A) 一条直线. (B) 一条抛物线.  
(C) 一条抛物线的一部分而不是全部. (D) 双曲线的一支.

5. The minimum value of the function  $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{x^2 + 4}$  is ( )

- (A) 4. (B)  $3\sqrt{2}$ . (C)  $2\sqrt{5}$ . (D)  $\sqrt{17}$ .

6. 若对于任意实数  $x$ , 都有  $t^2 + 5t \leq |2x - 4| - |x + 2|$  恒成立, 则  $t$  的取值范围是( )

- (A)  $[1, 4]$ . (B)  $[-4, -1]$ .  
(C)  $(-\infty, 1] \cup [4, +\infty)$ . (D)  $(-\infty, -4] \cup [-1, +\infty)$ .

7. 已知数列  $\{a_n\}$  的通项公式为  $a_n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$  ( $n \in \mathbf{N}^*$ ), 则数列  $\{a_n\}$  ( )

- (A) 有最大项, 没有最小项. (B) 有最小项, 没有最大项.  
(C) 既有最大项又有最小项. (D) 既没有最大项也没有最小项.

8. 已知函数  $f(x) = \left(\frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\right)^2$ , 则  $f(x)$  的最小正周期是( )

- (A)  $2\pi$ . (B)  $\frac{3}{2}\pi$ . (C)  $\pi$ . (D)  $\frac{\pi}{2}$ .

9. 双曲线  $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$  在点  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$  处的切线的方程是( )

- (A)  $y = -x + \sqrt{2}$ . (B)  $y = -x + 3\sqrt{2}$ . (C)  $y = -2x - \sqrt{2}$ . (D)  $y = -2x + 3\sqrt{2}$ .

10. 已知向量  $\vec{OA} = (-2, 0)$ ,  $\vec{OB} = (2, 2)$ ,  $\vec{BC} = (\sqrt{2} \cos \theta, \sqrt{2} \sin \theta)$  ( $0 \leq \theta < 2\pi$ ), 则向量  $\vec{OA}$  与  $\vec{OC}$  的夹角的取值范围是( )

- (A)  $\left[\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right]$ . (B)  $\left[\frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$ . (C)  $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ . (D)  $\left[\frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ .

## 二、填空题(每小题4分,共40分.)

11. 函数  $f(x) = \ln \frac{x}{x-1}$  的定义域是\_\_\_\_\_.

12. 三角式  $\sqrt{6} \tan 10^\circ + 4\sqrt{2} \cos 80^\circ$  的值等于\_\_\_\_\_.

13. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$ . 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项的乘积为  $\prod_n$ , 则  $\prod_{2012} =$ \_\_\_\_\_.

14. How many positive roots does the equation  $(x + \frac{1}{2})^{2012} - x^{2012} + 2x + \frac{1}{2} = 0$  have?  
\_\_\_\_\_.

15. 不等式  $\cos 2\theta + 2\sqrt{2} \cos \theta > 1$  的解集是\_\_\_\_\_.

16. 已知向量  $a, b, c$  是三个具有公共起点的非零向量, 且  $|a| = 2, |b| = 2$ , 又  $a \cdot b = -1$ ,  $\langle a - c, b - c \rangle = \frac{\pi}{3}$ , 则当  $|a - c| = \sqrt{7}$  时, 向量  $a$  与  $c$  的夹角是\_\_\_\_\_.

17. 若数列  $\{x_n\}$  满足条件  $x_1 = 3, x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{2x_n}$ , 则该数列的通项公式  $x_n =$ \_\_\_\_\_.

18. 已知点  $M$  是  $\triangle ABC$  所在平面内的一点, 且满足  $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4$ , 那么  $\triangle ABC$  三条边长之积  $AB \cdot BC \cdot CA$  的最大值是\_\_\_\_\_.

19. 如图1, 正方体  $ABCD - A'B'C'D'$  中,  $EE' \parallel FF' \parallel BB'$ , 平面  $AEE'A'$  与平面  $ABB'A'$  成  $15^\circ$  角, 平面  $AFF'A'$  与平面  $ADD'A'$  成  $30^\circ$  角. 如果正方体的棱长为1, 那么几何体  $AEF - A'E'F'$  的体积等于\_\_\_\_\_.

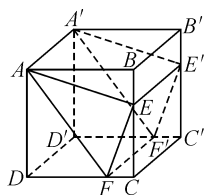


图1

20. 已知  $A, B$  是抛物线  $y^2 = 4x$  上的两个动点, 且  $|AB| = 3$ , 则当  $AB$  的中点  $M$  到  $y$  轴的距离最短时, 点  $M$  的横坐标是\_\_\_\_\_.

## 三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分10分)

解不等式  $\log_a(\sqrt{x^2+1}+x) + \log_a(\sqrt{x^2-2x+10}+x-1) \geq \log_a 3$  ( $a > 0$  且  $a \neq 1$ ).

22. (本题满分15分)

已知正三棱锥底面的一个顶点与它所对的侧面的重心的距离为4, 求此正三棱锥的体积的最大值.

23. (本题满分15分)

椭圆  $C: x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$  ( $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ ) 在第一象限内的一段弧记为  $AB$ , 点  $P(x, y)$  在弧  $AB$  上, 如图2.

(1) 用  $t(P)$  表示椭圆  $C$  在  $P$  点处的切线的单位向量, 方向是依椭圆的逆时针走向. 求向量  $t(P)$  的解析式;

(2) 令函数  $f(P) = t(P) \cdot OP$ , 写出函数  $f(P) \equiv f(x)$  的解析式;

(3) 求函数  $f(P)$  的最大值及取得最大值时的点  $P$  的坐标, 并确定函数  $f(P) \equiv f(x)$  的值域.

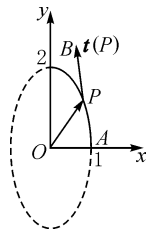


图2

## 高二 第2试答案

|    |  |   |                                   |            |    |   |                        |   |                |    |
|----|--|---|-----------------------------------|------------|----|---|------------------------|---|----------------|----|
| 题号 | 1  | 2 | 3                                 | 4          | 5  | 6 | 7                      | 8 | 9              | 10 |
| 答案 | A  | C | D                                 | B          | D  | B | C                      | C | D              | B  |
| 题号 | 11   |   |                                   | 12         |    |   | 13                     |   | 14             |    |
| 答案 | $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$   |   |                                   | $\sqrt{2}$ |    |   | 1                      |   | 0              |    |
| 题号 | 17   |   |                                   |            |    |   |                        |   |                |    |
| 答案 | $2k\pi - \arccos \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} < \theta < 2k\pi + \arccos \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, k \in \mathbb{Z}$ |   |                                   |            |    |   |                        |   |                |    |
| 题号 | 16   |   | 17                                |            | 18 |   | 19                     |   | 20             |    |
| 答案 | $\frac{\pi}{3}$  |   | $\frac{1+2^{-2x-1}}{1-2^{-2x-1}}$ |            | 8  |   | $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ |   | $\frac{9}{16}$ |    |

21. 略。

22. 18。

23. (1)  $t(P) = \left( -\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+3x^2}}, \frac{2x}{\sqrt{1+3x^2}} \right)$ 。

(2)  $f(P) \equiv f(x) = \frac{3x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+3x^2}} (0 \leq x \leq 1)$ 。

(3) 函数  $f(P)$  在点  $P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$  处取得最大值 1。