第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛

高二　第1试试题

一、选择题（每小题4分，共40分.）

1. 将函数 $y=x+2$ 的图象沿向量 $(2,1)$ 平移，得到的图象所对应的函数的解析式是（　　）

(A) $y=x+3$.　(B) $y=x+1$.　(C) $y=2x+2$.　(D) $y=-x-2$.

2. 设 $x,y,z>0$，$xyz+y+z=12$，则 $\log_4 x+\log_2 y+\log_2 z$ 的最大值是（　　）

(A) 3.　(B) 4.　(C) 5.　(D) 6.

3. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-2ax+2a^2+2=0\}$，$B=\{x\in\mathbf{R}\mid \log_2(x^2-2x+5)\geqslant a\}$，若 $A\cap \complement_{\mathbf{R}}B$ 不是 $A\cup\complement_{\mathbf{R}}B$ 的真子集，则实数 a 的取值范围是（　　）

(A) $(-2,2)$.　(B) $(-2,2]$.　(C) $(-\infty,2)$.　(D) $(-\infty,2]$.

4. 若不等式 $|ax+b|<3$ 的解集是 $-1<x<2$，则 $ab=$（　　）

(A) -2.　(B) -1.　(C) 1.　(D) 2.

5. 当 a,b,c 均为正实数时，给出以下三个不等式：

(1) $\sqrt{a^2-ab+b^2}<\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2-ca+a^2}$；

(2) $\sqrt{a^2-ab+b^2}<\sqrt{b^2-bc+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$；

(3) $\sqrt{a^2-ab+b^2}<\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{c^2+a^2}$.

其中，一定成立的不等式的个数是（　　）

(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 3.

6. 若 $\sin2\theta$ 和 $\cos4\theta$ 是函数 $f(x)=x^2-2a^2-4a-3$ 的两个零点，则 θ 的值是（　　）

(A) $\frac{1}{2}k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.　(B) $2k\pi+\frac{3\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

(C) $\frac{1}{4}k\pi+\frac{3\pi}{8}(k\in\mathbf{Z})$.　(D) $k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

7. Given the sequence $\{a_n\}$ satisfies $a_n+a_m=a_{n+m}$ (n and m are positive integers), and $a_1=\frac{1}{2013}$, then the sum of the first 2013 terms is (　　)

(A) $\frac{1}{2013}$.　(B) 1.　(C) 1007.　(D) 2013.

8. 已知平面直角坐标系内的点 $A(1,2)$ 和 $B(-2,4)$，及坐标原点 O，若点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$，其中 $m,n\in\mathbf{R}$，并且 $m^2-4n^2=1$，则点 P 的轨迹方程是（　　）

(A) $x-2y=1$.　(B) $2x-y=0$.　(C) $x^2-4y^2=1$.　(D) $xy=2$.

9. 方程 $x^2+2x+2y^2=2$ 的整数解 (x,y) 的个数是（　　）

(A) 1.　(B) 2.　(C) 3.　(D) 4.

10. 三棱锥 $S-ABC$ 的底面 ABC 是正三角形，侧棱长都是1，则此棱锥的体积的最大值是（　　）

(A) $\frac{1}{3}$.　(B) $\frac{1}{4}$.　(C) $\frac{1}{5}$.　(D) $\frac{1}{6}$.

二、A组填空题（每小题4分，共40分.）

11. 函数 $y=x^2+2\sqrt{4-x^2}$ 的值域是__________.

12. 若 $2\leqslant 2x+y\leqslant 4$，则函数 $f(x,y)=x^2-y^2+xy-2y$ 的最大值是__________.

13. 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足条件 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于__________度.

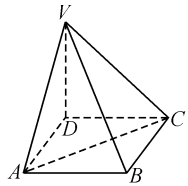
14. 已知不等式组 $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x+3y \geqslant 3 \\ 3x+2y \leqslant 6 \end{cases}$ 所表示的平面区域被直线 $y=kx+2$ 分成面积比是 $1:3$ 的两部分，则 k 的值是__________.

15. 已知函数 $f(x)=\log_a(2x^2+x)(a>0,a\neq 1)$，且 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f(x)>0$ 恒成立，则函数 $f(x)$ 的单调递增区间是__________.

16. If the straight line $l: mx+ny-2=0$ tangents to circle $C: x^2+y^2-4x-4y-8=0$, then the minimum value of $m+n+mn$ is __________.

17. 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $4S_n=a_{n+1}-3^{n+1}-3$，$a_1=0$，则用 n 表示数列通项 a_n，是__________.

18. 方程 $8\sin^3 x-6\sin x+1=0\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的解是__________.



19. 如图，四棱锥 $V-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是正方形，$VD\perp$ 面 $ABCD$，如果 $AD=DV=2$，那么面 VAC 与面 VCD 的夹角的正弦值等于__________.

20. 已知椭圆：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的左焦点为 F_1，右焦点为 F_2，点 P 在椭圆周上，则 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的取值范围是__________.

三、B 组填空题(每小题 8 分，共 40 分.)

21. 函数 $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{1+2x-x^2}}$ 的定义域是__________，值域是__________.

22. 当 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant 0$，$t\in\mathbf{R}$ 时，函数 $f(t,\theta)=(t-\cos\theta)^2+(t-\sin\theta)^2$ 的最大值是__________，最小值是__________.

23. 若将数列 $1,\ 1+3,\ 3+5+7,\ 5+7+9+11,\ 7+9+11+13+15,\cdots$，记为 $\{a_n\}$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=$__________，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和 $S_n=$__________.

24. 将边长为 1 的正方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起，使 D 点变到 D' 点，得到三棱锥 $D'-ABC$. 若 $D'A=D'B$，则三棱锥 $D'-ABC$ 的体积是__________，侧面 ABD' 与 BCD' 的夹角的余弦值是__________.

25. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2，过 F_2 的直线交双曲线的右支于点 M 和 N. 又点 A、B 分别是 $\triangle MF_1F_2$、$\triangle NF_1F_2$ 的内心. 当离心率 $e=2$，$|AB|=\frac{9}{2}$，直线 MN 倾斜角的正弦值为 $\frac{8}{9}$ 时，$a=$__________，双曲线的方程是__________.

附加题(每小题 10 分，共 20 分.)

1. 已知矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=1$，E 点在 AB 上，$AE=a(0<a<1)$. 小明从 E 点出发在矩形内行进，依次经过矩形三边 AD，DC，CB 上的一点(不含顶点)后，回到 E 点，则小明行进的路程最短是__________.

2. 曲线 C：$\frac{x^2}{9}+\frac{(|y|-1)^2}{4}=1$ 所围成的图形的面积是__________.

高二　第 1 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	D	A	D	D	C	D	D	D

题号	11	12	13	14	15
答案	$[4,5]$	$\frac{24}{5}$	120°	$-\frac{1}{3}$或$-\frac{3}{2}$	$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$
题号	16	17	18	19	20
答案	$-\frac{7}{6}$	$3\times5^{n-1}-3^n$	$\frac{\pi}{18}$或$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	$[-1,4]$

题号	21
答案	$1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$ 且 $x\ne\frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $(-\infty,-1]\cup[\sqrt{2}-1,\ +\infty)$.

题号	22	23
答案	$1;\frac{1}{2}$	$\begin{cases}1, & n=1\\ 3n^2-4n, & n\ge2\end{cases}$; $2+\frac{n(n+1)(2n-3)}{2}$

题号	24	25
答案	$\frac{\sqrt{2}}{12};-\frac{1}{3}$	$2;\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$
题号	附加题 1	附加题 2
答案	$2\sqrt{5}$	$8\pi+3\sqrt{3}$