第二十四届“希望杯”全国数学邀请赛

高二　第2试试题

一、选择题（每小题4分，共40分.）

1. 已知函数 $y=f(x)$ 是偶函数，且 $f(4+x)=f(4-x)$，则函数 $f(x)$（　　）

（A）是周期为2的函数.　　（B）是周期为4的函数.

（C）是周期为8的函数.　　（D）不是周期函数.

2. 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于（　　）

（A）$60°$.　　（B）$90°$.　　（C）$120°$.　　（D）$150°$.

3. 若函数 $y=\left|x^2+ax+a^2+\dfrac{5}{2}a-2\right|$ 有4个单调区间，则实数 a 的取值范围是（　　）

（A）$(-\infty,-4)$.　　（B）$\left(-4,\dfrac{2}{3}\right)$.　　（C）$\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$.　　（D）$\left[-4,\dfrac{2}{3}\right]$.

4. 当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，下列命题中正确的是（　　）

（A）$\sin(\cos x)>\cos(\sin x)$.　　（B）$\sin(\cos x)<\cos(\sin x)$.

（C）$\sin(\cos x)=\cos(\sin x)$.　　（D）$\sin(\cos x)$，$\cos(\sin x)$ 的大小不确定.

5. 直线 $3ax-2by-3=0(a>0,b>0)$ 与曲线 $x^2+y^2-2x+6y+1=0$ 相交于 A、B 两点，若 $AB=6$，则 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ 的最小值是（　　）

（A）$2\sqrt{2}$.　　（B）3.　　（C）$3\sqrt{2}$.　　（D）$3+2\sqrt{2}$.

6. 若关于 x 的不等式 $1<\dfrac{2\cos x-3a}{2a-\cos x}<2$ 有解，则参数 a 的取值范围是（　　）

（A）$\left(-\dfrac{4}{7},0\right)\cup\left(0,\dfrac{4}{7}\right)$.　　（B）$\left(-\dfrac{4}{7},0\right)\cup\left(0,\dfrac{3}{5}\right)$.

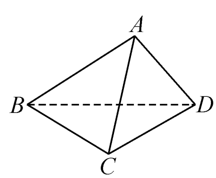
（C）$\left(-\dfrac{3}{5},0\right)\cup\left(0,\dfrac{3}{5}\right)$.　　（D）$\left(-\dfrac{3}{5},0\right)\cup\left(0,\dfrac{4}{7}\right)$.

7. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=-x^2\}$，$B=\{(x,y)\mid(x-5)^2+(y-1)^2=4\}$，$M\in A$，$N\in B$，则 $|MN|_{\min}=$（　　）

（A）$2\sqrt{5}-2$.　　（B）2.　　（C）$2\sqrt{3}-2$.　　（D）$2\sqrt{3}+1$.

8. 已知椭圆 C 的两个焦点分别是 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$，且 C 与直线 $x+y-3=0$ 有公共点，则 C 的离心率的最大值是（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{12}$.　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.　　（C）$\dfrac{\sqrt{6}}{6}$.　　（D）$\dfrac{\sqrt{5}}{10}$.



9. Let $ABCD$ be a tetrahedron with edge length 7, 13, 18, 27, 36, and 41. If $AB=41$, then $CD=$（　　）

（A）7.　　（B）13.　　（C）18.　　（D）27.

10. 在平面直角坐标系中，过点 $A(2,3)$ 且与单位圆 O 相切的圆的圆心轨迹是（　　）

（A）圆.　　（B）椭圆.　　（C）双曲线.　　（D）抛物线.

二、填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. 已知关于 x 的函数 $y=\lg[x^2+2(a+1)x+1]$ 的定义域是 $\mathbf{R}$,则 a 的取值范围是__________.

12. 已知 $f(x)=x+\dfrac{2}{x}$,则函数 $y=f(f(x))$ 的单调递增区间是__________.

13. 若关于 θ 的不等式 $\cos^2 2\theta-2\cos^2\theta+4-m^2<0$ 的解集为 $\left\{\theta \,\middle|\, \theta\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$,则实数 m 的值是__________.

14. Suppose $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}+\lg\dfrac{1-x}{1+x}$, then the solution set for the inequality $f\left[x\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]<\dfrac{1}{5}$ will be __________.

15. 已知直线 $l: y=kx-1$ 与圆 $C: x^2+y^2-8x-6y+21=0$ 交于 A、B 两点(C 为圆心),若 $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$,则 $k=$__________.

16. 已知三棱锥 $A-BCD$ 的侧棱长都是 6,且 $AB\perp AC$,$AB\perp AD$,$\angle CAD=60^\circ$,点 E、F 分别在 AC、AD 上,$\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FD}=2$,则 $V_{F-BDE}=$__________.

17. 若关于 x 的方程 $3\cos 2x-\dfrac{2k}{\cos x}=25$ 有解,则参数 k 的取值范围是__________.

18. 已知抛物线 $C: x^2=4y$ 的焦点是 F,直线 l 与 C 交于 A、B 两点,若 $AF=2$,$BF=5$,则满足条件的直线 l 的条数是__________.

19. 有一个正四棱锥 $V-ABCD$,侧面都是边长为 1 的正三角形,设点 P 在侧面 VAB 的边 AB 的高线上,且点 P 到点 V 与到边 AB 的距离比为 $1:3$,M 是边 BC 的中点,则在棱锥表面上从点 P 到点 M 的最短距离是__________.

20. 以棱长为 1 的正方体的一个顶点,以及与它不共面的三个面的中心组成一个三棱锥,则这个三棱锥的体积是__________.

三、解答题

每题都要写出推算过程.

21. (本题满分 10 分)

已知函数 $y=f(x)=2-\dfrac{1}{x}$,数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_1=2$,$a_{n+1}=f(a_n)$.

(1) 证明:存在一个等差数列 $\{b_n\}$,使得当 $n>1$ 时,$a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ 成立;

(2) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

22. (本题满分 15 分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面是正方形,$PD=AD=4$,PD 与底面成 60° 角,点 H 在 AD 上,且 $PH\perp$ 底面 $ABCD$,点 M 是 PC 的中点.求:

(1) DM 与 BC 所成角的余弦值;

(2) 直线 PC 与 HB 间的距离.

23. (本题满分 15 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,曲线 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{(|y|-1)^2}{4}=1$,内接于曲线 C 的矩形 D 的边都平行于坐标轴.(注:矩形 D 的顶点在曲线 C 上,且矩形 D 的边上的任意一点 (x_0, y_0) 在曲线 C 内,即 $\dfrac{x_0^2}{9}+\dfrac{(|y_0|-1)^2}{4}\leqslant 1$.)

(1) 求矩形 D 的周长 L 和面积 S 关于 x 的函数表达式;

(2) 求周长 L 的最大值.

高二　第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	B	B	D	C	A	B	B	C

题号	11	12	13
答案	$-2<a<0$	$\left(\sqrt{2},+\infty\right)\cup\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$	$\pm\sqrt{5}$

题号	14	15	16
答案	$(\frac{1-\sqrt{17}}{4},0)\cup(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4})$	$\frac{8\pm\sqrt{15}}{7}$	$2\sqrt{3}$

题号	17	18	19	20
答案	$\left[-11,0\right)\cup\left(0,11\right]$	4	$\frac{1}{8}\sqrt{39}$	$\frac{1}{12}$

21. （1）略.

（2）数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=\dfrac{n+1}{n}$.

22. （1）$\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

（2）$\dfrac{8\sqrt{93}}{31}$.

23. （1）

$$L=\begin{cases}-4x+\frac{8}{3}\sqrt{9-x^2} & -3<x<-\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ -4x+\frac{8}{3}\sqrt{9-x^2}+4 & -\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant x<0\\ 4x+\frac{8}{3}\sqrt{9-x^2}+4 & 0<x\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ 4x+\frac{8}{3}\sqrt{9-x^2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}<x<3\end{cases}.$$

$$S=\begin{cases}-\frac{8}{3}x\sqrt{9-x^2} & -3<x<-\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ -4x\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}+1\right) & -\frac{3\sqrt{3}}{2}\leqslant x<0\\ 4x\left(\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}+1\right) & 0<x\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{8}{3}x\sqrt{9-x^2} & \frac{3\sqrt{3}}{2}<x<3\end{cases}.$$

（2）$4\sqrt{13}+4$.