第二十五届“希望杯”全国数学邀请赛

高二　第 1 试试题

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分.）

1. 命题 P：x 和 y 满足 $\begin{cases}1<x+y<7,\\0<xy<10.\end{cases}$ 命题 Q：x 和 y 满足 $\begin{cases}0<x<5,\\1<y<2.\end{cases}$ 那么，P 是 Q 的（　　）

（A）充分不必要条件.　　（B）必要不充分条件.

（C）充要条件.　　（D）既不充分也不必要条件.

2. 若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，则函数 $f(x)$ 一定是（　　）

（A）奇函数.　　（B）偶函数.　　（C）减函数.　　（D）增函数.

3. 函数 $f(x)=|\sin 2x|+|\cos 2x|$ 的最小正周期是（　　）

（A）$\dfrac{\pi}{8}$.　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$.　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$.　　（D）π.

4. 已知 A 是 $\triangle ABC$ 的一个内角，且满足 $\cos A+\sin A=\dfrac{1}{2}$，那么，$\triangle ABC$ 是（　　）

（A）锐角三角形.　　（B）直角三角形.

（C）钝角三角形.　　（D）等边三角形.

5. 从 1，2，3，…，100 中任取 3 个数，使这 3 个数恰好成等差数列的不同取法有（　　）

（A）2440 种.　　（B）2450 种.　　（C）2500 种.　　（D）2550 种.

6. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_na_{n+1}^2+2a_{n+1}-a_n=0(a_n>0)$，$a_1=1$，那么，该数列的通项公式是（　　）

（A）$a_n=2^{n-1}$.　　（B）$a_n=\log_4 2^{n+1}$.　　（C）$a_n=\tan\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.　　（D）$a_n=2\sin^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$.

7. If a_1, a_2, …, $a_{2014}\in\mathbf{R}^+$, $a_1+a_2+\cdots+a_{2014}=1$, and $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{2014}^2=\dfrac{1}{2013}$, then the value range of a_{2014} is（　　）

（A）$\left(0,\dfrac{1}{1006}\right]$.　　（B）$\left(0,\dfrac{1}{1007}\right]$.　　（C）$\left(0,\dfrac{1}{2013}\right]$.　　（D）$\left(0,\dfrac{1}{2014}\right]$.

8. 在平面直角坐标系内，已知点 $A(1,3)$，点 $B(3,1)$，若点 C 在抛物线 $y^2=-2x$ 上，则 $\triangle ABC$ 的面积的最小值是（　　）

（A）$\dfrac{7}{4}$.　　（B）$\dfrac{7}{2}$.　　（C）$\dfrac{475}{16}$.　　（D）$\dfrac{217}{8}$.

9. 若 $\lambda<5x+3y$ 对一切满足 $\log_{\frac{3}{\pi}}(3x-y-6)<\log_{\frac{3}{\pi}}(8y-3x+24)$ 的 x，y 都成立，则实数 λ 的最大值是（　　）

（A）-2.　　（B）-1.　　（C）2.　　（D）5.

10. 如图 1，椭圆的中心在坐标原点 O，顶点分别是 A_1、A_2、B_1、B_2，焦点分别是 F_1、F_2，延长 B_2F_2 交 A_2B_1 于点 P. 若 $\angle B_2PA_2$ 是钝角，则此椭圆的离心率的取值范围是（　　）

（A）$\left(0,\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$.　　（B）$\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{4},1\right)$.

（C）$\left(0,\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.　　（D）$\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$.

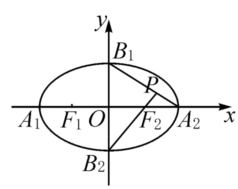

图 1

二、A 组填空题(每小题 4 分,共 40 分.)

11. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}=$__________.

12. 在平面直角坐标系 xOy 中,直线 $l:ax+by+c=0$ 被圆 $C:x^2+y^2=16$ 截得的弦的中点为 M.若 $a+3b-c=0$,则 OM^2 的最大值是__________.

13. 当 $x\geqslant 1$ 时,$f(x)=ax^2-2x+3\geqslant 0$ 恒成立,则 a 的最小值是__________.

14. 过 $\triangle ABC$ 的重心的直线 PQ 交 AC 于点 P,交 BC 于点 Q.若 $\overrightarrow{PC}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{QC}=n\overrightarrow{BC}$,则 n 的值是__________.

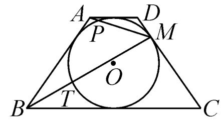

图 2

15. 如图 2,$\odot O$ 是等腰梯形 $ABCD$ 的内切圆,M 是切点,AM、BM 分别与 $\odot O$ 交于点 P、T,则 $\dfrac{AM}{AP}+\dfrac{BM}{BT}$ 的值等于__________.

16. 如图 3,正三棱柱 $ABC-A'B'C'$ 的底面边长是 1,点 D、E 分别是棱 $A'C'$、$B'C'$ 的中点,四边形 $ADEB$ 的面积是 $\dfrac{3}{4}$,则 $AA'=$__________.

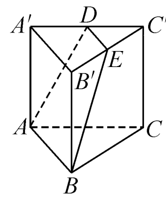

图 3

17. 正方体的中心、顶点以及各面的中心,共 15 个点,可以组成__________个三角形.

18. 在平面直角坐标系内,曲线 $\log_x y=\log_y x$ 与抛物线 $y=x^2$ 的交点的个数是__________.

19. 当 $0<\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$ 时,不等式 $\cos 2\theta+2a\sin\theta-2\leqslant 0$ 恒成立,则参数 a 的取值范围是__________.

20. 若直线 l 与椭圆 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 相切,则 l 与坐标轴所围成的三角形的面积的最小值是__________.

三、B 组填空题(每小题 8 分,共 40 分.)

21. 函数 $f(x)=x^3-x^2-x+1$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上的最大值是__________,最小值是__________.

22. 已知 $f(1,1)=1$,$f(2,1)=2$,$f(2,2)=4$,$f(3,1)=7$,$f(3,2)=11$,$f(3,3)=16$,$f(4,1)=22$,$f(4,2)=29$,…,如此继续下去,则 $f(5,5)=$__________,$f(100,1)=$__________.

23. $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 2,三个内角满足 $2\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\cos 2C=1$,则 $C=$__________°,$\triangle ABC$ 的面积的最大值是__________.

24. As shown in the Fig. 4. Suppose the base of rectangular box $ABCD-A'B'C'D'$ is a square with length 1. Let M be the midpoint of BB'. If the plane AMC is perpendicular to plane $A'MC'$, then the height of the rectangular box $ABCD-A'B'C'D'$ is __________, and its surface area is __________.

(英汉词典:base 底;rectangular box 长方体;be perpendicular to 垂直于)

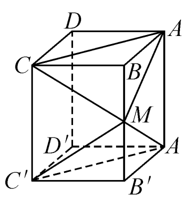

Fig. 4

25. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $(3+a_{n+1})(2-a_n)=6(a_n\neq 0)$,$a_1=1$,则 $a_2=$__________,$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}=$__________.

高二　第 1 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	B	C	B	C	B	B	A	D

题号	11	12	13	14	15
答案	3	10	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	10
题号	16	17	18	19	20
答案	$\frac{\sqrt{13}}{4}$	436	0	$a \le \sqrt{2}$	2

题号	21	22
答案	$\frac{32}{27}$；$\frac{3}{8}$	106；12253726

题号	23	24	25
答案	120；$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$；$2+4\sqrt{2}$	3；$6-6\times(\frac{2}{3})^n-n$