第二十六届“希望杯”全国数学邀请赛

高二　第1试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.)

1. 已知集合 $M=\{m \mid m^2-m-6\leqslant 0\}$,$N=\{n \mid 3^{1-n}<9\}$,则 $M\cap N=$(　　)

(A) $[-2,-1)$.　(B) $(-1,3]$.　(C) $[-1,3]$.　(D) $[-2,3]$.

2. 函数 $y=(\sin x)^4$ 的最小正周期是(　　)

(A) 2π.　(B) π.　(C) $\dfrac{\pi}{2}$.　(D) $\dfrac{\pi}{4}$.

3. 当 $x\geqslant 0,y\geqslant 0$ 时,函数 $f(x,y)=x\sqrt{2-y^2}+y\sqrt{3-x^2}$ 的最大值是(　　)

(A) $\sqrt{2}$.　(B) $\sqrt{3}$.　(C) $\sqrt{6}$.　(D) $2\sqrt{3}$.

4. 已知点 A,B,C,P 在同一平面内,且 $\overrightarrow{PQ}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{PA}$,$\overrightarrow{QR}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{QB}$,$\overrightarrow{RP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{RC}$,则 $\triangle ABC$ 与 $\triangle PBC$ 的面积之比是(　　)

(A) $14:3$.　(B) $19:4$.　(C) $24:5$.　(D) $29:6$.

5. Suppose $[x]$ represents the greatest integer no larger than real number x. Then the number of the integer solutions to the equation $[3x^2+5x]=2$ is (　　)

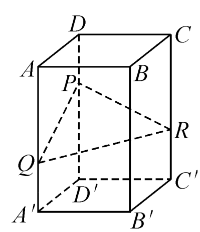
(A) 0.　(B) 1.　(C) 2.　(D) 4.

6. 设不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0,\\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}\leqslant 1,\end{cases}$ 表示的区域为 D.已知对于 $a\geqslant 0,b\geqslant 0$,当点 $P(x,y)\in D$ 时,$ax+by\leqslant 5$ 恒成立,则点 (a,b) 所形成的平面区域的面积等于(　　)

(A) $\dfrac{25}{9}$.　(B) $\dfrac{25}{12}$.　(C) $\dfrac{25}{16}$.　(D) 6.

7. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|\lg(-x)|, & x<0,\\ x^2-6x+4, & x>0.\end{cases}$ 若关于 x 的函数 $y=f^2(x)-bf(x)+1$ 有8个不同的零点,则实数 b 的取值范围是(　　)

(A) $(2,+\infty)$.　(B) $[2,+\infty)$.　(C) $\left(2,\dfrac{17}{4}\right)$.　(D) $\left(2,\dfrac{17}{4}\right]$.



8. 如图,已知长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$,P、Q、R 分别是所在棱的三等分点,平面 PQR 将长方体分成两部分,则这两部分体积的比是(　　)

(A) $1:1$.　(B) $2:3$.　(C) $1:2$.　(D) $2:5$.

9. 已知 t 是常数，若方程 $\sqrt{x^2+y^2-2x+1}=t\mid 3x-4y\mid$ 所表示的图形是椭圆，则 t 的取值范围是(　　)

(A) $\left(0,\frac{1}{5}\right)$.　　(B) $\left[0,\frac{1}{5}\right]$.　　(C) $\left(0,\frac{1}{5}\right]$.　　(D) $\left[0,\frac{1}{5}\right)$.

10. 已知 $\triangle ABC$，如果适当排列 $\sin A$，$\cos A$ 和 $\tan A$ 的顺序，可使它们成为一个等比数列，那么角 A 的大小属于区间(　　)

(A) $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.　　(B) $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$.　　(C) $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$.　　(D) $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$.

二、A 组填空题(每小题 4 分，共 40 分.)

11. 不等式 $4^x>2^x+2$ 的解集是__________.

12. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x-2, & x\leqslant 0,\\ f(x-1)-f(x-2), & x>0.\end{cases}$ 则 $f(2015)=$__________.

13. 比较 e^2 和 2^e 的大小，结果是 e^2 __________ 2^e.(填“$>$”,“$<$”,或“$=$”.其中 e 是自然对数的底)

14. 长方体的所有棱与平面 α 所成的角均为 θ，则 $\cos\theta=$__________.

15. 若正实数 a 与它的整数部分及小数部分构成等差数列，则 $a=$__________.

16. 已知 $|a|\leqslant 1$，$|b|\leqslant 1$，$|c|\leqslant 1$，则 $ab+bc+ca$ 的取值范围是__________.

17. 已知 $m,n\in\mathbf{N}^*$，且 $1\leqslant m,n\leqslant 100$，则数列 $\{4m+1\}$ 与 $\{6n-3\}$ 的所有相同项的和为__________.

18. 函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-5}{3x+3}$ 的值域是__________.

19. 若正数 a,b 满足 $2a+b=1$，则 $\dfrac{a}{2-2a}+\dfrac{b}{2-b}$ 的最小值是__________.

20. Given a parabola $C:y^2=4x$. Points $A(4,4)$, P, and Q are on the parabola. If the sum of the slopes of AP and AQ is $\frac{4}{3}$, then PQ is supposed to pass through a fixed point D. The coordinate of D is __________.　(英汉小词典：parabola 抛物线；slope 斜率；coordinate 坐标)

三、B 组填空题(每小题 8 分，共 40 分.)

21. 函数 $y=\sin^2x+\sin x$ 的最大值是__________，最小值是__________.

22. 函数 $y=\sqrt{x^2-6x+8}+\sqrt{8+6x-x^2}$ 的定义域是__________，值域是__________.

23. 长方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的各面的中点 P,Q,R,X,Y,Z 组成一个__________面体，它的体积与长方体的体积的比值是__________.

24. 已知 $\{a_n\}$ 是单调递增数列，且有 $a_1=4$，$a_{n+1}^2+a_n^2+81=18(a_{n+1}+a_n)+2a_{n+1}a_n$. 则 $a_2=$__________，$a_n=$__________.

25. 已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 的两焦点是 F_1,F_2，点 $P(x_0,y_0)$ 满足 $0<\dfrac{x_0^2}{2}+y_0^2<1$，则 $|PF_1|+|PF_2|$ 的取值范围是____，直线 $\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 与椭圆 C 的交点的个数是______.

高二　第 1 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	B	C	B	B	B	C	C	A	A

题号	11	12	13	14	15	16
答案	$(1,+\infty)$	$-\frac{3}{2}$	$>$	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	1.5	[-1,3]

题号	17	18	19	20
答案	6633	$\left(-\infty,\frac{5-2\sqrt{22}}{9}\right]\cup\left[\frac{5+2\sqrt{22}}{9},+\infty\right)$	$-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$(-2,-1)$

题号	21	22
答案	2； $-\frac{1}{4}$	$\left[3-\sqrt{17},2\right]\cup\left[4,3+\sqrt{17}\right]$；　$[4,4\sqrt{2}]$

题号	23	24	25
答案	八； $\frac{1}{6}$	25； $(3n-1)^2$	$[2,2\sqrt{2})$； 0