第二十六届“希望杯”全国数学邀请赛

高二　第2试试题

一、选择题(每小题4分,共40分.以下每个题目的选择支中,仅有一个是正确的.)

1. 已知 $\sin x+\cos x=-1$,则 $\sin^{2015}x+\cos^{2015}x$ 的值是(　　)

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) $-2^{\frac{2015}{2}}$.

2. 已知 $x,y\in\mathbf{R}^{+}$,$x+y=1$,$M=\dfrac{\sqrt{x}}{x+y^{2}}+\dfrac{\sqrt{y}}{x^{2}+y}$,$N=\dfrac{\sqrt{y}}{x+y^{2}}+\dfrac{\sqrt{x}}{x^{2}+y}$,则 M 与 N 的大小关系是(　　)

(A) $M>N$.　　(B) $M<N$.　　(C) $M=N$.　　(D) 不确定的.

3. 若 $S=\ln2+(\ln2)^{2}+\cdots+(\ln2)^{n}+\cdots$,则(　　)

(A) $0<S<1$.　　(B) $1<S<2$.　　(C) $2<S<3$.　　(D) $S>3$.

4. 已知点 P 是边长为1的正五边形 $ABCDE$ 内(含边界)一点,则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{PE}|$ 的最大值是(　　)

(A) $\dfrac{1}{2\cos36^{\circ}}$.　　(B) $\dfrac{1}{2\sin36^{\circ}}$.　　(C) $\dfrac{5}{2\cos36^{\circ}}$.　　(D) $\dfrac{5}{2\sin36^{\circ}}$.

5. 已知 $a\in\mathbf{R}^{+}$,在区间 $[-a,a]$ 上随机取数 x,使得 $|x+1|-|x-2|\geqslant0$ 成立的概率是 $\dfrac{1}{4}$,那么,a 的值是(　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

6. 设 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数,如果不等式 $2x^{2}+\sqrt{3}[x]+1>k$ 对于所有实数 x 都成立,那么,k 的最大值是(　　)

(A) $\dfrac{5}{8}$.　　(B) $1-\sqrt{3}$.　　(C) $2\sqrt{3}-1$.　　(D) $1+\sqrt{3}$.

7. 如果二次函数 $y=f(x)=ax^{2}+x+a$ 的顶点坐标满足 $x^{2}+\dfrac{y^{2}}{4}\leqslant1$,则 a 的最小值是(　　)

(A) $-\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.　　(B) $-\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\dfrac{1}{4}$.

8. $f(x)=x^{3}+(3-2a)x^{2}+ax\ (x\in\mathbf{R})$ is a monotonic function, a is a parameter. Then the value range of a is(　　)

(A) $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4}\right]$.　　(B) $\left(\dfrac{3}{4},3\right)$.　　(C) $\left[\dfrac{3}{4},3\right]$.　　(D) $[4,6]$.

9. 已知椭圆 $C:3x^{2}+4y^{2}=12$ 和直线 $l:y=4x+m$,若 C 上存在关于 l 对称的两个不同的点,则实数 m 的取值范围是(　　)

(A) $\left(-\infty,-\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.　　(B) $\left(-\dfrac{2\sqrt{13}}{13},\dfrac{2\sqrt{13}}{13}\right)$.

(C) $\left[-\frac{2\sqrt{13}}{13},\frac{2\sqrt{13}}{13}\right]$.　　　　(D) $\left(-\infty,-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{13}}{13},+\infty\right)$.

10. 过正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 外一点，与直线 AC_1 和 BC 的夹角都是 80° 的直线的条数是（　　）

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

二、填空题（每小题 4 分，共 40 分.）

11. 已知 $f(2^x-1)=\sqrt{2x-1}$，则 $f(x)$ 的定义域是__________.

12. 满足 $\sqrt{2015}-\sqrt{2014}<\sqrt{a}-\sqrt{2001}$ 的最小正整数 a 的值是__________.

13. 已知点 $A(2,0)$，$B(0,\sqrt{2})$，直线 $y=kx+b$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$ 有两个交点 P、Q. 当四边形 $ABPQ$ 的面积最大时，$b=$__________.

14. 计算：$\dfrac{\tan\frac{\pi}{8}\tan\frac{5}{8}\pi}{\tan\frac{\pi}{8}+\tan\frac{5}{8}\pi+1}=$__________.

15. 已知函数 $f(x)=\sqrt{2x-k}$，若存在两个不同的实数 a,b，使 $f(a)=\frac{a}{3}$，$f(b)=\frac{b}{3}$，则实数 k 的取值范围是__________.

16. In tetrahedron $ABCD$, $AB=CD=\sqrt{34}$, $AC=BD=\sqrt{41}$, $AD=BC=5$. Then the volume of the sphere circumscribing of the tetrahedron is __________.

17. 若实数 x,y 满足 $\max\{2-x,x^2-4\}\leqslant y\leqslant x+2$，则 $5x-y$ 的取值范围是__________.

18. 设等差数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n，T_n. 若 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{n+1}{4n+5}$，则 $\frac{a_{2015}}{b_4+b_{12}}=$__________.

19. 函数 $y=\cos^3x-\cos 2x+\cos x$ 的值域是__________.

20. 已知 $f(x)=x^2+2a\sqrt{1-x^2}+a^2-4a+5$，若 $f(x)$ 的最大值是 $g(a)$，则关于 a 的不等式 $\log_{\frac{1}{2}}g(a)+3<0$ 的解集是__________.

三、解答题　每题都要写出推算过程.

21.（本题满分 10 分）

Non-zero real number x, y satisfy $(x+\sqrt{x^2+12})(y+\sqrt{y^2+3})=6$. Find $\frac{y}{x}$.

22.（本题满分 15 分）

已知圆锥的母线长为 l，底面半径为 r，求此圆锥的内接正 $n(n\geqslant 3)$ 棱柱的体积的最大值，及对应的 n 棱柱的底面多边形的边长.

（注：圆锥的内接正 n 棱柱是指顶点在圆锥的侧面上或圆锥的底面内的正 n 棱柱.）

23.（本题满分 15 分）

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线的斜率之积为 -3，左、右两支上分别有动点 A 和 B.

(1) 若经过点 $D(0,5a)$ 的直线 AB 的斜率为 1，且 $\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{DB}$，求实数 λ 的值；

(2) 设点 A 关于 x 轴的对称点为点 M. 若直线 AB、MB 分别与 x 轴交于点 P、Q，O 为坐标原点. 证明：$|OP|\cdot|OQ|=a^2$.

高二　第 2 试答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	C	D	B	B	A	C	B	D

题号	11	12	13	14	15
答案	$[\sqrt{2}-1,+\infty)$	2002	$-\sqrt{2}$	1	$0 \le k < 9$

题号	16	17	18	19	20
答案	$\frac{125\sqrt{2}}{3}\pi$	$\left[-2,\frac{41}{4}\right]$	31	$\left[-3,\frac{31}{27}\right]$	$a<2-\sqrt{6}$ 或 $a>3$

21. $\frac{y}{x}=-\frac{1}{2}$.

22. 体积最大值是 $\frac{2}{27}nr^2\sqrt{l^2-r^2}\bullet\sin\frac{2\pi}{n}(n\ge 3)$.

正 n 边形的边长是 $a=\frac{4}{3}r\sin\frac{\pi}{n}$.

23. （1）$\lambda=\frac{2}{7}$.

（2）略.